RIEMANN-HURWITZ Y APLICACIONES

FELIPE INOSTROZA

1. Riemann-Hurwitz

Proposición 1.1. *Sea X una superficie de Riemann compacta. Existe un entero $g(X) \geq 0$ tal que, para toda triangulación con V vértices, E aristas y T triángulos:*

$$V - E + T = 2 - 2g(X).$$

El número $g(X)$ se llama el género *de X.*

Ejemplo 1.2. Sea $X = \mathbb{P}^1$ la esfera de Riemann. Al ser homeomorfo a una esfera, nos sirve un tetraedro. Tenemos que $V = 4, \quad E = 6, \quad T = 4$, por lo que

$$2 - 2g(\mathbb{P}^1) = V - E + T = 4 - 6 + 4 = 2$$
$$\implies g(\mathbb{P}^1) = 0$$

Ejemplo 1.3. Sea $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ un retículo con $\Im\tau > 0$, y sea $X = \mathbb{C}/\Lambda$, tenemos la triangulación del paralelogramo fundamental como en la figura 1.

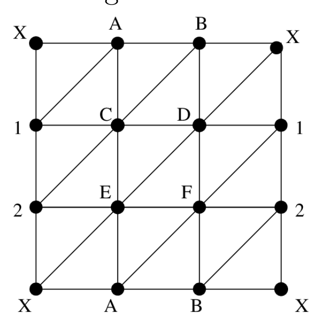

Figura 1. Triangulación del paralelógramo fundamental.

Esto desciende a una triangulación del toro. Tenemos que $V = 9, \quad E = 27, \quad T = 18$, por lo que

$$2 - 2g(X) = V - E + T = 9 - 27 + 18 = 0$$
$$\implies g(X) = 1$$

Notación. Sea $F \colon X \to Y$ una función holomorfa no constante de superficies de Riemann. Para $y \in Y$ escribimos

$$S_y \coloneqq \sum_{p \in F^{-1}(y)} (e_p F - 1).$$

Como y tiene finitas preimágenes, tenemos que

$$S_y = \sum_{p \in F^{-1}(y)} e_p F - \sum_{p \in F^{-1}(y)} 1 = \deg F - \# F^{-1}(y).$$

Notemos que $S_y \geq 0$, e y es punto branch si y solo si $S_y \neq 0$.

Date: May 16, 2025.

Teorema 1.4 (Riemann-Hurwitz)**.** *Sean X, Y superficies de Riemann compactas, y sea $F\colon X \to Y$ una función holomorfa no constante, entonces*

$$2g_X - 2 = (2g_Y - 2)\deg F + \sum_{p \in X} (e_p F - 1).$$

Demostración. Consideremos una triangulación de Y con V vértices, E aristas y T triángulos. Por refinación, podemos asumir que los puntos branch están en un vértice. Luego esto se levanta a una triangulación de X con V' vértices, E' aristas y T' triángulos. Notemos que $E' = E \deg F$ y $T' = T \deg F$. Luego

$$\begin{aligned}
V' &= \sum_{\substack{vertice \\ q \in Y}} \#F^{-1}(q) \\
&= \sum_{\substack{vertice \\ q \in Y}} \deg F - \deg F + \#F^{-1}(q) \\
&= \sum_{\substack{vertice \\ q \in Y}} \deg F - S_q \\
&= V \deg F - \sum_{\substack{vertice \\ q \in Y}} S_q \\
&= V \deg F - \sum_{y \in Y} S_y \\
&= V \deg F - \sum_{y \in Y} \sum_{p \in F^{-1}(y)} (e_p F - 1) \\
&= V \deg F - \sum_{p \in X} (e_p F - 1).
\end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned}
2g(X) - 2 &= -V' + E' - T' \\
&= -V \deg F + \sum_{p \in X} (e_p F - 1) + E \deg F - T \deg F \\
&= (-V + E - T) \deg F + \sum_{p \in X} (e_p F - 1) \\
&= (2g(Y) - 2) \deg F + \sum_{p \in X} (e_p F - 1).
\end{aligned}$$

□

Observación. También podemos escribir

$$2g_X - 2 = (2g_Y - 2)\deg F + \sum_{y \in Y} S_y.$$

Proposición 1.5. *Sea $F\colon X \to Y$ función holomorfa entre superficies de Riemann compactas, entonces $g(X) \geq g(Y)$.*

Demostración. Por Riemann-Hurwitz:

$$\begin{aligned} 2g(X) - 2 &= (2g(Y) - 2) \deg F + \sum_{y \in Y} S_y \\ &\geq (2g(Y) - 2) \deg F \\ \implies g(X) - 1 &\geq (g(Y) - 1) \deg F. \end{aligned}$$

Si $g(Y) = 0$, entonces $g(X) \geq 0 = g(Y)$. Si $g(Y) \geq 1$, entonces

$$\begin{aligned} g(X) - 1 &\geq (g(Y) - 1) \deg F \\ &\geq g(Y) - 1 \\ \implies g(X) &\geq g(Y). \end{aligned}$$

□

Esto nos da el siguiente resultado:

Teorema 1.6. *Sean $f, g, h \in \mathbb{C}[x]$ polinomios no constantes tales que*

$$f^n + g^n = h^n,$$

entonces $n \leq 2$.

Demostración. Tenemos las curvas $C_n\colon x^n + y^n = z^n$. Esta es una curva plana suave proyectiva, por lo que tiene género $(n-1)(n-2)/2$. Consideremos la función

$$\begin{aligned} F\colon \mathbb{P}^1 &\longrightarrow C_n \subset \mathbb{P}^2, \\ t &\longmapsto [f(t) : g(t) : h(t)]. \end{aligned}$$

esta función es holomorfa y no constante, y por la proposición anterior tenemos

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} \leq g(\mathbb{P}^1) = 0 \implies \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 0.$$

Luego $n = 1$ o $n = 2$. □

2. Cubrimiento étale del toro

Sea $\Lambda = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ un retículo con $\Im(\tau) > 0$, y sea $X = \mathbb{C}/\Lambda$. Fijando $n \geq 2$ entero, consideremos la función $\phi\colon X \to X$ dada por

$$\phi(p) = \underbrace{p + \cdots + p}_{n \text{ veces}}$$

Notemos que $\phi([z]) = [nz]$, entonces es una función holomorfa y homomorfismo de grupos. Notemos que

$$\begin{aligned} \ker \phi = \{[z] \colon [nz] = \Lambda\} = \{[z] \colon nz \in \Lambda\} = \{[z] \colon z \in \frac{1}{n}\Lambda\} \\ \implies \# \ker \phi = n^2. \end{aligned}$$

Como ϕ es morfismo de grupos, tenemos que $\phi^{-1}(p) = \# \ker \phi = n^2$ para todo $p \in X$. Luego $\deg \phi = n^2$, y $S_p = 0$ para todo $p \in X$. Luego ϕ no ramifica. Por Riemann-Hurwitz tenemos

$$2g - 2 = (2g - 2)n^2 \implies g = 1.$$

3. Género de Curvas Elípticas

Sea E una curva elíptica sobre $\mathbb{C}$, con ecuación de Weierstrass

$$y^2 = f(x) = x^3 + ax + b$$

donde $4a^3 - 27b^2 \neq 0$. Consideremos la proyección

$$\begin{aligned} \pi\colon E &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ (x,y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ no es raíz de f, entonces $\pi^{-1}(\alpha) = \{(\alpha, \pm\sqrt{f(\alpha)})\}$, por lo que $\deg \pi = 2$. Si $f(\alpha) = 0$, entonces $\pi^{-1}(\alpha) = \{(\alpha, 0)\}$, por lo que $S_\alpha = 1$. Notemos también que $\pi^{-1}(\infty) = \{[0:1:0]\}$, por lo que $S_\infty = 1$. Luego, por Riemann-Hurwitz

$$2g_E - 2 = (2g(\mathbb{P}^1) - 2)\deg \pi + \sum_{p\in\mathbb{P}^1} S_p = -2\cdot 2$$

$$\implies g_E = 1.$$

Por lo tanto, tenemos el siguiente resultado:

Teorema 3.1. *Todas las curvas elípticas sobre $\mathbb{C}$ son isomorfas a un toro.*

Demostración. Toda curva elíptica tiene género 1, y por la clasificación de superficies compactas, sin borde, conexas y orientables, tiene que ser un toro. □

4. Superficies de Riemann Hiperelípticas

Sea $h(x)$ un polinomio de grado $2g+2$ (o $2g+1$) con raíces distintas, y consideremos la curva $X\colon y^2 = h(x)$. Definimos

$$k(z) := z^{2g+2} h\left(\frac{1}{z}\right).$$

Consideremos la curva $Y\colon w^2 = k(z)$. Sea

$$\begin{aligned} \phi\colon \{(x,y)\in X\colon x\neq 0\} &\longrightarrow \{(z,w)\in Y\colon z\neq 0\} \\ (x,y) &\longmapsto \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x^{g+1}}\right) \end{aligned}$$

Luego sea $Z = (X \sqcup Y)/\phi$. Esta es una superficie de Riemann compacta, ya que

$$Z = \{(x,y)\in X\colon \|x\| \leq 1\} \cup \{(z,w)\in Y\colon \|z\|\leq 1\}.$$

Luego consideremos la proyección

$$\begin{aligned} \pi\colon Z &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ (x,y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

Notemos que $\deg \pi = 2$. Si h tiene grado par, entonces los puntos de ramificación son las $2g+2$ raíces de h, y si tiene grado impar entonces los puntos de ramificación de π son las $2g+1$ raíces de h junto con ∞. En ambos casos tenemos $2g+2$ puntos de ramificación con multiplicidad 2. Luego

$$2g_Z - 2 = (-2)\deg\pi + 2g + 2 = -4 + 2g + 2 = 2g - 2$$

$$\implies g_Z = g.$$

Así, tenemos una forma de generar superficies de Riemann de cualquier género.

5. El Teorema de Mason-Stothers

Observación. Si tomamos $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in Y$, notemos que

$$\sum_{y \in Y} S_y \geq \sum_{i=1}^{r} S_{\alpha_r} = r \deg F - \sum_{i=1}^{r} \#F^{-1}(\alpha_i),$$

luego

$$2g_X - 2 \geq (2g_Y - 2)\deg F + r \deg F - \sum_{i=1}^{r} \#F^{-1}(\alpha_i)$$

$$\implies \sum_{i=1}^{r} \#F^{-1}(\alpha_i) \geq (2g_Y - 2 + r)\deg F + 2 - 2g_X.$$

Si $Y = \mathbb{P}^1$, entonces

$$\sum_{i=1}^{r} \#F^{-1}(\alpha_i) \geq 2(1 - g_X) + (r-2)\deg F.$$

Teorema 5.1 (Mason-Stothers)**.** *Sean $f, g, h \in \mathbb{C}[x]$ polinomios no todos constantes, coprimos de a pares y tales que $f + g = h$. Entonces*

$$\max\{\deg f, \deg g, \deg h\} \leq \deg \operatorname{rad}(fgh) - 1.$$

Demostración. Podemos suponer que $\deg f \geq \deg g$. Sea $u = f/h \in \mathbb{C}(x)$. Esta es una función $u\colon \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$, con $\deg u = \max\{\deg f, \deg h\}$. Si ignoramos $\infty \in \mathbb{P}^1$, tenemos que:

$$u^{-1}(0) = f^{-1}(0), \quad u^{-1}(\infty) = h^{-1}(0).$$

Notemos que

$$\begin{aligned} g^{-1}(0) &= \{\alpha\colon g(\alpha) = 0\} \\ &= \{\alpha\colon f(\alpha) = h(\alpha)\} \\ &= \{\alpha\colon u(\alpha) = 1\} \\ &= u^{-1}(1). \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \#u^{-1}(0,1,\infty) &= \#u^{-1}(0) + \#u^{-1}(1) + \#u^{-1}(\infty) \\ &= \deg \operatorname{rad} f + \deg \operatorname{rad} g + \deg \operatorname{rad} h \\ &= \deg \operatorname{rad}(fgh). \end{aligned}$$

Pero podría ser que $\infty \in u^{-1}(0,1,\infty)$, por lo que realmente tenemos

$$\#u^{-1}(0,1,\infty) \leq \deg \operatorname{rad}(fgh) + 1$$

Por Riemann-Hurwitz, tenemos que

$$\begin{aligned} \deg \operatorname{rad}(fgh) + 1 &\geq \#u^{-1}(0) + \#u^{-1}(1) + \#u^{-1}(\infty) \\ &\geq 2(1-0) + (3-2)\deg u \\ &= 2 + \deg u \\ \implies \deg u &\leq \deg \operatorname{rad}(fgh) - 1. \end{aligned}$$

$\square$